

УДК: 517.956

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1\(4\)_29](https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_29)

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН БИР КЛАССЫ ҮЧҮН ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕНИН ЧЕЧИЛИШИ

Мамытов Айтбай Омонович, ф.-м.и.к.
mamytov1968@list.ru

Назарали кызы Сабина, магистрант
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. Макалада тик бурчтуу аймакта үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн биринчи түрдөгү чектик маселенин оң жагын аныктоо тескери маселеси изилденди. Изилденип жаткан тик бурчтун ички чекиттерде кошумча шарттар берилген. Тескери маселедеги бардык функциялар үзгүлтүксүз жана талап кылынган даражада жылма функциялар. Тескери маселени чыгарууда алгач белгилөө кийирип үчүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдеме экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемеге алып келинет, андан соң Гриндин функциясынын жардамында чек аралык маселенин чыгарылыш жазылат, аягында Крамердин эрежесин колдонуп белгисиз функциялар табылды. Натыйжада үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин бир классы үчүн тескери маселенин чечилиши далилденди.

Ачкыч сөздөр: тескери маселе, жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме, баштапкы шарт, чектик шарт, функциянын изи, Гриндин функциясы, маселенин чыгарылышы, маселенин чечилиши.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Мамытов Айтбай Омонович, к.ф.-м.н.
mamytov1968@list.ru

Назарали кызы Сабина, магистрант
Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан

Аннотация. В статье исследуется обратная задача определения правой части краевой задачи первого типа для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка в прямоугольной области. Задаются дополнительные условия во внутренних точках исследуемого прямоугольника. Все функции в обратной задаче являются непрерывными и достаточно гладкими до требуемого порядка. При решении обратной задачи дифференциальное уравнение третьего порядка с помощью обозначения сводится к дифференциальному уравнению второго порядка, а затем с помощью функции Грина записывается решение краевой задачи и в конце неизвестные функции находятся с помощью правила Крамера. В результате было доказано разрешимость обратной задачи для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка.

Ключевые слова: обратная задача, дифференциальное уравнение в частных производных, начальное условие, граничное условие, след функции, функция Грина, решение задачи, разрешимость задачи.

SOLVABILITY OF THE INVERSE PROBLEM FOR A CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES OF THE THIRD ORDER

Mamytov Aitbay Omonovich, c.ph-m.s.
mamytov1968@list.ru

Nazarali kyzy Sabina, master student
Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

Annotation. The paper investigates the inverse problem of determining the right side of the boundary value problem of the first type for a third-order partial differential equation in a rectangular domain. Additional conditions are set at the interior points of the rectangle under study. All functions in the inverse problem are continuous and sufficiently smooth up to the required order. When solving the inverse problem, a third-order differential equation is reduced to a second-order differential equation using the notation, then the solution of the boundary value problem is written using the Green's function, and at the end, the unknown functions are found using the Cramer rule. As a result, the solvability of the inverse problem for one class of third-order partial differential equations was proved.

Keywords: inverse problem, partial differential equation, initial condition, boundary condition, function trace, Green's function, problem solution, problem solvability.

Төмөнкү тескери маселени изилдейбиз

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + \varphi_1(t)f_1(t, x) + \varphi_2(t)f_2(t, x) + \dots + \varphi_n(t)f_n(t, x), \quad (t, x) \in \Omega \quad (1)$$

$$u(0, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(t, x_i) = g_i(t), \quad u(t, x_2) = g_2(t), \dots, u(t, x_n) = g_n(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$x_i \in (0, 1), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad x_i \neq x_j, \quad i \neq j,$$

мында $\Omega = \{(t, x) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$, $0 < T \in \mathbf{R}$, x_i ($i=1, 2, \dots, n$) – белгилүү турактуу сандар, $\psi(x)$, $f_i(t, x)$, $g_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) – белгилүү функциялар, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ жана $u(t, x)$ – функциялары белгисиз;

Маселенин коюлушу: (1)- теңдемени жана (2)-(4) шарттарды канааттандырган $u \in C^{1,2}(\bar{\Omega})$, $\varphi_i \in C[0, T]$, $i = 1, 2, \dots, n$ функцияларын табуу [1]-[11].

Төмөнкү шарттар орун алат деп эсептейбиз:

$$\text{Ш}_1. \quad f_i \in C(\Omega), \quad \psi \in C[0, 1], \quad g_i \in C^1[0, T], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{Ш}_2. \quad \psi(0) = \psi(1) = 0, \quad g_i(0) = \psi(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Маселенин чыгарылышы. Белгилөө кийирип алабыз [3]-[7]:

$$v(t, x) = u_t(t, x), \quad (5)$$

(5)- белгилөөнү эске алып, (1)- дифференциалдык теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$v_{xx}(t, x) - v(t, x) = -(\varphi_1(t)f_1(t, x) + \varphi_2(t)f_2(t, x) + \dots + \varphi_n(t)f_n(t, x)), \quad (t, x) \in \Omega, \quad (6)$$

(3)- чек аралык шарттардан жана (5)- белгилөөдөн төмөнкүнү алабыз:

$$v(t, 0) = v(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7)$$

Жогорудагы 1- лемманы колдонобуз.

$$v(t, x) = - \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) \int_0^1 G(x, \xi) f_j(t, \xi) d\xi \quad (8)$$

(8)-де бир тендеме, бирок $(n+1)$ белгисиз. Ошондуктан (4)-шарттарды эске алабыз.

Эгерде (8)де $x=x_i$ деп алсак, анда (8):

$$v(t, x_i) = - \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) \int_0^1 G(x_i, \xi) f_j(t, \xi) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

Белгилөө кийирип алабыз:

$$m_{ij}(t, x_i) = - \int_0^1 G(x_i, \xi) f_j(t, \xi) d\xi, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Анда (9) төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$v(t, x_i) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) m_{ij}(t, x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Эгерде (4)- шарттарды эске алсак, анда биз n белгисиздүү n тендемелердин системасын алабыз:

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j(t) m_{ij}(t, x_i) = g'_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

Белгилөө кийирип алабыз:

$$M(t) = \begin{pmatrix} m_{11}(t, x_1) & m_{12}(t, x_1) & \dots & m_{1n}(t, x_1) \\ m_{21}(t, x_2) & m_{22}(t, x_2) & \dots & m_{2n}(t, x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}(t, x_n) & m_{n2}(t, x_n) & \dots & m_{nn}(t, x_n) \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} g'_1(t) \\ g'_2(t) \\ \vdots \\ g'_n(t) \end{pmatrix}$$

анда (10)- система

$$M(t) \Phi(t) = B(t)$$

көрүнүшкө келет.

Сызыктуу алгебра курсунан бизге белгилүү болгондой $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = M^{-1}(t) B(t). \quad (11)$$

Белгилөө кийирип алабыз

$$m_i(t, x) = - \int_0^1 G(x, \xi) f_i(t, \xi) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(8)ди өзгөртүп жазып алабыз:

$$v(t, x) = M(t, x) \Phi(t), \quad (12)$$

мында $M(t, x) = (m_1(t, x) \ m_2(t, x) \ \dots \ m_n(t, x))$.

(11)-ди (12)ге алып келип коебуз:

$$v(t, x) = M(t, x) M^{-1}(t) B(t). \quad (13)$$

(5)- барабардыкты t өзгөрүлмөсү боюнча 0 дон t га чейин интегралдайбыз:

$$u(t, x) = \int_0^t v(s, x) ds + u(0, x),$$

жогоруда (2)- деги $u(0, x) = \psi(x)$ шарттын эске алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$u(t, x) = \int_0^t v(s, x) ds + \psi(x). \quad (13)$$

(12)-ни (13)-гө алып келип коебуз:

$$u(t, x) = \int_0^t M(s, x) M^{-1}(s) B(s) ds + \psi(x)$$

Натыйжада биз төмөнкү теореманы далилдедик

Теорема. Эгерде $\mathbf{III}_1$, $\mathbf{III}_2$ жана $\forall t \in [0, T]: \det M(t) \neq 0$ шарттары аткарылса, анда (1)-(4) тескери маселенин чыгарылышы төмөнкү көрүнүштө болот:

$$\varphi(t) = M^{-1}(t)B(t), \quad u(t, x) = \int_0^t M(s, x) M^{-1}(s) B(s) ds + \psi(x).$$

Мисал. Төмөнкү маселени карайлы:

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + \varphi(t)(t + x), \quad (t, x) \in \Omega$$

$$u(0, x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(t, 1/2) = t, \quad t \in [0, T].$$

Жогорудагы алгоритмге таянып, чыгарылышты так жаза алабыз:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{m_1(t, 1/2)}, \quad u(t, x) = \int_0^t \frac{1}{m_1(s, 1/2)} \int_0^1 G(x, \xi)(s + \xi) d\xi ds + x,$$

мында

$$m_1(t, 1/2) = \int_0^1 G(1/2, \xi)(t + \xi) d\xi, \quad G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{sh(x-1)sh(\xi)}{sh(1)}, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ \frac{sh(x)sh(\xi-1)}{sh(1)}, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Адабияттар

1. Бухгейм, А. Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. – Новосибирск: Наука, 1983. – 207 с.
2. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. – 457 с.
3. Мамытов, А.О. Об одной задаче определения правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2021. – Т. 13. - № 3. – С. 31–38.
4. Мамытов, А.О. Разрешимость обратной начально-краевой задачи с известным значением на прямой // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2021. – Т. 13. - № 2. – С. 18–23.
5. Мамытов, А.О., Асанов А., Турсунов Д.А. Задача восстановления ядра и правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка // ЕНО. – 2021. – № 8(78). – С. 31–34.
6. Мамытов А.О., Асанов А., Турсунов Д.А. Жогорку тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн баштапкы-чек аралык тескери маселенин чечилиши // ОшМУнун жарчысы. «Математика. Физика. Техника». – 2021. – № 2. – С. 5–13.
7. Алымкулов К., Турсунов Д. А. Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 12. – С. 3–11.
8. Турсунов Д. А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота // Тр. ИММ УрО РАН. – 2016. – Т. 22. – № 1. – С. 271–281.
9. Tursunov D. A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38. – No 3. – P. 542–546.
10. Турсунов Д. А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем // Изв. вузов. Математика. – 2018. – № 3. – С. 70–78.
11. Кожобеков К. Г., Турсунов Д. А. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2019. – Т. 29. – № 3. – С. 332–340.